Devoir Maison 2

Problème
(adapté de Ecricome ECS 2018)

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Partie I — Variables vérifiant une relation de Panjer

On dit qu'une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie une relation de Panjer s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$$\mathbb{P}(N=0) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(N=k) = \left(a + \frac{b}{k}\right)\mathbb{P}(N=k-1).$$

1. On suppose **dans cette question** que $a = 0$, et que b est un réel strictement positif.
   a) Montrer que :
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(N=k) = \frac{b^k}{k!}\mathbb{P}(N=0).$$
   b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=k)$. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b.
   Préciser son espérance et sa variance.
2. On suppose **dans cette question** que $a < 0$ et que $b = -2a$.
   a) Montrer que :
   $$\forall k \geqslant 2, \quad \mathbb{P}(N=k) = 0.$$
   b) En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a.
3. On suppose **dans cette question** que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$.
   a) Montrer que :
   $$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}(Z=k) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}(Z=k-1).$$
   b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes, en fonction de n et p.
4. On revient dans cette question au cas général : a est un réel vérifiant $a < 1$, b est un réel, et on suppose que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de Panjer.
   a) Calculer $\mathbb{P}(N=1)$. En déduire que $a + b \geqslant 0$.
   b) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$:
   $$\sum_{k=1}^{m} k\mathbb{P}(N=k) = a\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\mathbb{P}(N=k) + b\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}(N=k).$$
   c) En déduire que $\left((1-a)\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k\mathbb{P}(N=k)\right)_{m\geqslant 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance.
   Préciser alors la valeur de $\mathbb{E}(N)$ en fonction de a et b.
   d) Montrer que N admet un moment d'ordre 2 et que :
   $$\mathbb{E}\left(N^2\right) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}.$$
   e) En déduire que N admet une variance et préciser la valeur de $\mathbb{V}(N)$ en fonction de a et b.
   f) Montrer que $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$ si, et seulement si, N suit une loi de Poisson.

Partie II — Fonction génératrice

On notera dans la suite :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad p_k = \mathbb{P}(N = k),$$

où N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On suppose dans cette partie que N vérifie une relation de Panjer avec $0 < a < 1$ et que $\dfrac{b}{a} > 0$.
On note $\alpha = \dfrac{-(a+b)}{a}$ et G la série génératrice de N

5. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière G
6. On considère la série entière $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k} p_{k-1} x^k$ et H sa fonction somme.
   (a) Justifier que G et H ont même rayon
   (b) Pour $x \in]-R, R[$ déterminer $H'(x)$
7. (a) Montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$

$$G(x) = p_0 + axG(x) + bH(x)$$

   (b) En déduire une équation différentielle linéaire vérifiée par G.
   (c) Déterminer un expression explicite de G sur $]-R, R[$.
8. En utilisant G et ses dérivées, retrouver les expressions de $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{V}(N)$ obtenues dans la partie I.

Corrigé

Corrigé de l'exercice

Partie I — Variables vérifiant une relation de Panjer

Remarque

Cette relation a été introduite par Panjer en 1981, ce qui, pour les mathématiques, est extrêmement récent, et a des applications principalement en actuariat

1. (a) On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(N = k) = \dfrac{b}{k}\mathbb{P}(N = k-1)$.

   Montrons alors par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(k)$: « $\mathbb{P}(N = k) = \dfrac{b^k}{k!}\mathbb{P}(N = 0)$ » est vraie.

   Initialisation :

   $\mathbb{P}(N = 0) = \dfrac{b^0}{0!}\mathbb{P}(N = 0)$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Hérédité :

   Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

$$\mathbb{P}(N = k+1) = \frac{b}{k+1}\mathbb{P}(N = k) = \frac{b}{k} + 1\frac{b^k}{k!}\mathbb{P}(N = 0) = \frac{b^{k+1}}{(k+1)!}\mathbb{P}(N = 0)$$

   Ce qui prouve la propriété au rang $k+1$ et achève la récurrence.

   (b) La série de terme général $\dfrac{b^k}{k!}\mathbb{P}(N = 0)$ est une série exponentielle (multipliée par une constante). On en déduit qu'elle converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!}\mathbb{P}(N = 0) = \mathbb{P}(N = 0)\mathrm{e}^b$$

   Or, la série de terme général $\dfrac{b^k}{k!}\mathbb{P}(N = 0)$ coïncide avec la série de terme général $\mathbb{P}(N = k)$. Sa somme vaut donc aussi 1, car la famille $([N = k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. On en déduit que $\mathbb{P}(N = 0) = \mathrm{e}^{-b}$. Dès lors, $N(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(N = k) = \mathrm{e}^{-b}\frac{b^k}{k!}$$

   La variable aléatoire N suit donc une loi de Poisson de paramètre b. Par conséquent, elle admet une espérance et une variance avec $\mathbb{E}(N) = b$ et $\mathbb{V}(N) = b$.

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout $k \geqslant 2$, $\mathbb{P}(N = k) = 0$.

   Initialisation :

   $\mathbb{P}(N = 2) = \left(a + \dfrac{b}{2}\right)\mathbb{P}(N = 1) = (a - a)\mathbb{P}(N = 1) = 0$.

   Hérédité :

   Soit $k \geqslant 3$. Supposons que $\mathbb{P}(N = k-1) = 0$. Montrons que $\mathbb{P}(N = k) = 0$.

$$\mathbb{P}(N = k) = \left(a - \frac{2a}{k}\right)\mathbb{P}(N = k-1) = 0$$

   Ce qui prouve la propriété au rang k et achève la récurrence.

   (b) On déduit de la question précédente que $N(\Omega) = \{0, 1\}$. Par conséquent, N suit une loi de Bernoulli. De plus, $\mathbb{P}(N = 1) + \mathbb{P}(N = 0) = 1$.

   D'où, $-a\mathbb{P}(N = 0) + \mathbb{P}(N = 0) = 1$ et comme $a < 1$, $\mathbb{P}(N = 0) = \dfrac{1}{1-a}$. Par conséquent, N suit une loi de Bernoulli de paramètre $-\dfrac{a}{1-a}$.

3. (a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a $\mathbb{P}(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Or $\binom{n}{k} = \frac{n+1-k}{k}\binom{n}{k-1}$. D'où

$$\mathbb{P}(Z=k) = \frac{n+1-k}{k} \times \frac{p}{1-p}\binom{n}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n+1-k} = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbb{P}(Z=k-1)$$

(b) On sait déjà ,comme $n \in \mathbb{N}^*$, que $\mathbb{P}(Z = 0) \neq 1$. De plus, avec la relation précédente, en posant $a = -\frac{p}{1-p}$ et $b = \frac{p(n+1)}{1-p}$, on a bien $a < 1$ car $-p < 1-p$ et $1-p > 0$ et

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \mathbb{P}(N = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right)\mathbb{P}(N = k-1)$$

Enfin, $a + \frac{b}{n+1} = 0$. La relation précédente reste donc vraie pour $k = n+1$ et, par une récurrence immédiate du même type que celle effectuée à la question 2.(a), elle reste vraie pour $k \geqslant n+1$ car tous les termes sont nuls. On a donc bien

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(N = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right)\mathbb{P}(N = k-1)$$

La variable aléatoire Z vérifie donc une relation de Panjer.

4. (a) On a $\mathbb{P}(N = 1) = (a+b)\mathbb{P}(N = 0)$.

Supposons par l'absurde que $\mathbb{P}(N = 0) = 0$. Alors, une récurrence immédiate du type de celle de la question 2.(a) montre alors que pour tout $k \in \mathbb{N}$ $\mathbb{P}(N = k) = 0$, ce qui est absurde car $N(\Omega) = \mathbb{N}$.

On en déduit que $\mathbb{P}(N = 0) > 0$. Or $\mathbb{P}(N = 1) \geqslant 0$ d'où $a + b \geqslant 0$.

(b) Soit $m \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} k\mathbb{P}(N=k) &= a\sum_{k=1}^{m} k\mathbb{P}(N=k-1) + b\sum_{k=1}^{m}\mathbb{P}(N=k-1)\\ &= a\sum_{j=0}^{m-1}(j+1)\mathbb{P}(N=j) + b\sum_{j=0}^{m-1}\mathbb{P}(N=j)\end{aligned}$$

en faisant les changements de variables $j = k-1$ dans les deux sommes.

(c) Avec le résultat de la question précédente, on a donc pour tout $m \geqslant 1$

$$(1-a)\sum_{k=1}^{m-1} k\mathbb{P}(N=k) + m\mathbb{P}(N=m) = (a+b)\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}(N=k)$$

D'où pour tout $m \geqslant 2$,

$$(1-a)\sum_{k=1}^{m} k\mathbb{P}(N=k) + (m+1)\mathbb{P}(N=m+1) = (a+b)\sum_{k=0}^{m}\mathbb{P}(N=k) \qquad (\star)$$

Or, $1-a > 0$, $a+b \geqslant 0$, $(m+1)\mathbb{P}(N = m+1) \geqslant 0$ et $\sum_{k=0}^{m}\mathbb{P}(N = k) \leqslant 1$.

Dès lors,

$$(1-a)\sum_{k=1}^{m} k\mathbb{P}(N=k) \leqslant a+b \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{m} k\mathbb{P}(N=k) \leqslant \frac{a+b}{1-a}$$

La suite $\left((1-a)\sum_{k=1}^{m} k\mathbb{P}(N=k)\right)_{m\geqslant 1}$ est ainsi majorée par $a+b$.

De plus, la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k\mathbb{P}(N=k)\right)_{m\geqslant 1}$ est croissante majorée par $\dfrac{a+b}{1-a}$, elle converge donc vers un réel $\ell \leqslant \dfrac{a+b}{1-a}$

La variable aléatoire N admet une espérance si et seulement si la série de terme général $k\mathbb{P}(N=k)$ est absolument convergente ce qui équivaut ici à sa convergence car la variable aléatoire N est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On en déduit donc que N admet une espérance.

Par conséquent, $(m+1)\mathbb{P}(N=m+1)$ est le terme général d'une série convergente, d'où $\lim\limits_{m\to+\infty}(m+1)\mathbb{P}(N=m+1)=0$. Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N=k)=1$, en faisant tendre m vers $+\infty$ dans la relation $(\star)$, on en déduit que $(1-a)\mathbb{E}(N)=a+b$,d'où $\mathbb{E}(N)=\dfrac{a+b}{1-a}$

(d) On raisonne avec des calculs similaires à ceux menés dans la question 4.

On a alors pour tout $m\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} k^2\mathbb{P}(N=k) &= a\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)^2\mathbb{P}(N=k)+b\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\mathbb{P}(N=k)\\ &= a\sum_{k=0}^{m-1}k^2\mathbb{P}(N=k)+(2a+b)\sum_{k=0}^{m-1}k\mathbb{P}(N=k)+(a+b)\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}(N=k)\end{aligned}$$

D'où

$$(1-a)\sum_{k=1}^{m-1}k^2\mathbb{P}(N=k)+m^2\mathbb{P}(N=m)=(2a+b)\sum_{k=0}^{m-1}k\mathbb{P}(N=k)+(a+b)\sum_{k=0}^{m-1}\mathbb{P}(N=k) \qquad (\star)$$

On a déjà montré que $a+b\geqslant 0$. Il reste à montrer que $2a+b\geqslant 0$.

On a $2\mathbb{P}(N=2)=(2a+b)\mathbb{P}(N=1)$. Si $\mathbb{P}(N=1)=0$, alors par une récurrence immédiate, on montre que pour tout $k\geqslant 1$, $\mathbb{P}(N=k)=0$ d'où $\mathbb{P}(N=0)=1$, ce qui est exclu.

On a donc $\mathbb{P}(N=1)>0$ et en fait même $a+b>0$. Comme $\mathbb{P}(N=2)\geqslant 0$, on en déduit que $2a+b\geqslant 0$. Dès lors, pour tout $m\geqslant 2$, en appliquant la dernière égalité au rang $m+1$, il vient, comme $(m+1)^2\mathbb{P}(N=m+1)\geqslant 0$,

$$(1-a)\sum_{k=1}^{m}k^2\mathbb{P}(N=k)\leqslant(2a+b)\mathbb{E}(N)+(a+b)$$

car $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}k\mathbb{P}(N=k)\leqslant\mathbb{E}(N)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\mathbb{P}(N=k)\leqslant 1$.

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{m}k^2\mathbb{P}(N=k)\leqslant\frac{2a+b}{1-a}\mathbb{E}(N)+\frac{a+b}{1-a}$$

La suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{m}k^2\mathbb{P}(N=k)\right)_{m\geqslant 1}$ est croissante majorée, elle converge donc. La série de terme général $k^2\mathbb{P}(N=k)$ est donc absolument convergente car convergente et à termes positifs et N admet ainsi un moment d'ordre 2.

De plus, $(m+1)^2\mathbb{P}(N=m+1)\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow}0$. En faisant tendre m vers $+\infty$ dans l'égalité $(\star)$, on obtient

$$\mathbb{E}(N^2)=\frac{2a+b}{1-a}\mathbb{E}(N)+\frac{a+b}{1-a}=\frac{(a+b)}{(1-a)^2}(2a+b+1-a)=\frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}$$

(e) La variable aléatoire N admet un moment d'ordre 2 donc une variance. Avec la formule de Koenig-Huygens, il vient

$$\mathbb{V}(N) = \mathbb{E}(N^2) - (\mathbb{E}(N))^2 = \frac{(a+b)(a+b+1-a-b)}{(1-a)^2} = \frac{a+b}{(1-a)^2}$$

(f) On sait déjà que, si N suit une loi de Poisson, alors $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$.

Réciproquement, supposons que $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N)$. Avec les résultats des question 4.(c) et 4.(d), on a alors

$$\frac{(a+b)}{(1-a)^2}(1-(1-a)) = 0 \text{ si et seulement si } a = 0 \text{ ou } a+b = 0$$

Si $a+b=0$, alors $\mathbb{P}(N=1) = 0$ et, par une récurrence immédiate, on en déduit que $\mathbb{P}(N=k) = 0$ pour tout $k \geqslant 1$. D'où $\mathbb{P}(N=0) = 1$ ce qui est exclu.

Ainsi $a+b \neq 0$ d'où $a = 0$. D'après la question 1.(b), on en déduit que N suit une loi de Poisson de paramètre b.

On a donc bien l'équivalence voulue.

Partie II — Fonction génératrice

5. Pour $k \in \mathbb{N}$ on a $p_k \mathbb{P}(N=k) \neq 0$ car $a > 0$ et $b > 0$.

   De plus

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = a + \frac{b}{k+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} a$$

   Ainsi, d'après le critère de D'Alembert, G est de rayon de convergence $\dfrac{1}{a}$.

6. (a) On peut simplement appliquer de nouveau le critère de D'Alembert ou bien remarquer que H s'obtient à partir de G par primitivation terme à terme et donc que, d'après le cours, elles ont même rayon de convergence.

   (b) Pour $x \in]-R, R[$ on a, par dérivation terme à terme,

$$H'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} p_{k-1} k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} p_{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k = G(x)$$

7. (a) Soit $x \in]-R, R[$ alors

$$\begin{aligned}
G(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k \\
&= p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} p_k x^k \\
&= p_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1} x^k \\
&= p_0 + a\sum_{k=1}^{+\infty} p_{k-1} x^k + b\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} p_{k-1} x^k \qquad \textit{toutes ces séries convergent} \\
&= p_0 + ax\sum_{k=1}^{+\infty} p_{k-1} x^{k-1} + bH(x) \\
&= p_0 + axG(x) + bH(x)
\end{aligned}$$

   (b) En dérivant la relation précédente on a

$$\forall x \in]-R, R[, \qquad G'(x) = axG'(x) + aG(x) + bG(x)$$

   G est donc solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle $y' - \dfrac{a+b}{1-ax} y = 0$ (sur $]-R, R[$ on a $1 - ax > 0$ et donc la division est licite)

(c) Il nous suffit de résoudre l'équation différentielle.

La fonction $x \mapsto -\dfrac{a+b}{1-ax}$ se primitive sur $]-R,R[$ en $x \mapsto \dfrac{a+b}{a}\ln(1-ax)$.

Il existe alors $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]-R,R[, \qquad G(x) = K\exp\left(-\frac{(a+b)}{a}\ln(1-ax)\right) = K(1-ax)^\alpha$$

Or, comme G est la série génératrice d'une variable aléatoire on a nécessairement $G(1) = 1$, i.e. $K(1-a)^\alpha = 1$ et donc

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right[, \qquad G(x) = \left(\frac{1-ax}{1-a}\right)^\alpha$$

8. Comme $1 < \dfrac{1}{a}$, G est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 1. Ainsi N admet des moments à tout ordre et donc en particulier une espérance et une variance.

On a alors

$$\mathbb{E}(N) = G'(1) = \frac{-a}{1-a}\alpha = \frac{a+b}{1-a}$$

et

$$\mathbb{V}(N) = \mathbb{E}(N(N-1)) + \mathbb{E}(N) - \mathbb{E}(N)^2 = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2 = \frac{a^2}{(1-a)^2}\alpha(\alpha-1) + \frac{a+b}{1-a} - \frac{(a+b)^2}{(1-a)^2} = \frac{a+b}{(1-a)^2}$$

On retrouve bien les expressions de $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{V}(N)$ obtenues dans la première partie.